Statistique 3
2018-2019. Exercices: Approche Asymptotique

Exercice 1

Soit $(T_n)_{n\geq 1}$ une suite de vecteurs aléatoires dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. On dit que la suite T_n est *bornée en probabilité* (ou encore qu'elle est *tendue*), et on écrit $T_n = O_{\mathbb{P}}(1)$, si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ and $n_0 \geq 1$ tels que pour tout $n \geq n_0$, $\mathbb{P}[\|T_n\|_2 \geq A] \leq \varepsilon$. Plus géneralement, si $(s_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles, on écrit que $T_n = O_{\mathbb{P}}(s_n)$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ et $n_0 \geq 1$ tels que pour tout $n \geq n_0$, $\mathbb{P}[\|T_n\|_2 \geq As_n] \leq \varepsilon$.

1. Montrer que si $T_n = o_{\mathbb{P}}(1)$ (i.e., T_n tend vers zéro en probabilité), alors $T_n = O_{\mathbb{P}}(1)$.
2. Montrer que si T_n converge en probabilité, alors elle est tendue.
3. Montrer que si T_n converge en loi, alors elle est tendue.
4. Montrer que si $(\rho_n)_{n\geq 1}$ est une suite tendant vers $+\infty$, et si $\rho_n T_n$ converge en loi, alors $T_n = o_{\mathbb{P}}(1)$.
5. Supposons que T_n converge vers zéro en probabilité. Soit $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $g(x) = o(\|x\|_2^p)$ lorsque $x \to 0$. Montrer que $g(T_n) = o_{\mathbb{P}}(\|T_n\|_2^p)$, i.e., pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}[|g(T_n)| \geq \varepsilon\|T_n\|_2^p] \to 0$ quand $n \to \infty$.
6. Supposons que T_n converge vers zéro en probabilité. Soit $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $g(x) = O(\|x\|_2^p)$ lorsque $x \to 0$. Montrer que $g(T_n) = O_{\mathbb{P}}(\|T_n\|_2^p)$.
7. Pour $n \geq 1$, soit X_n une variable aléatoire de Poisson de paramètre $1/n$.
   a) Montrer que $X_n = o_{\mathbb{P}}(1)$.
   b) Montrer (le fait étonnant) que pour toute suite de réels strictements positifs $(u_n)_{n\geq 1}$, $X_n = o_{\mathbb{P}}(u_n)$.
   c) X_n tend-elle vers zéro presque sûrement ?

Exercice 2

Soit $(T_n)_{n\geq 1}$ une suite de vecteurs aléatoires dans $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) et T un vecteur aléatoire dans $\mathbb{R}^d$.

1. Montrer que si T_n converge presque sûrement vers T, alors T_n converge aussi en probabilité vers T.
2. Montrer que si T_n converge en probabilité vers T, alors T_n converge en loi vers T.
3. Si T est déterministe, montrer que la convergence en loi vers T implique la convergence en probabilité vers T.

Exercice 3

Soit $\alpha \in (0,1)$ et ℓ_α la fonction qui à tout réel t associe αt si $t \geq 0$, $(\alpha-1)t$ si $t < 0$. On note la fonction $\phi(x,t) = \ell_\alpha(x-t)$, $x, t \in \mathbb{R}$. Soit $X_1, X_2, \dots$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d., admettant une densité (par-rapport à la mesure de Lebesgue) strictement positive sur $\mathbb{R}$. Pour $n \geq 1$, soit $\hat{q}_n$ un M-estimateur associé à la fonction ϕ.

1. Montrer que $\hat{q}_n$ est un quantile empirique d'ordre α de l'échantillon $X_1, \dots, X_n$.
2. On note $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ les valeurs réordonnées de l'échantillon (montrer que les inégalités sont en fait larges presque sûrement). Montrer que $X_{(\lceil n\alpha \rceil)}$ est un quantile empirique d'ordre α. Dans la suite, pour simplifier, on prendra $\hat{q}_n = X_{(\lceil n\alpha \rceil)}$ (pour un réel t, $\lceil t \rceil$ est le plus petit entier supérieur ou égal à t).
3. On souhaite démontrer la normalité asymptotique de $\hat{q}_n$.
   a) Montrer que la loi de X_1 admet un unique quantile d'ordre α, qu'on notera q.

   b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, montrer que $\mathbb{P}[\sqrt{n}(\hat{q}_n - q) \leq t] = \mathbb{P}[N \geq n\alpha]$, où N est une variable binomiale de paramètres $n, F(q + t/\sqrt{n})$, et F est la fonction de répartition de X_1.
   c) Quelle est la loi limite de $\dfrac{1}{\sqrt{n}}(N - nF(q + t/\sqrt{n}))$ lorsque $n \to \infty$? (*Indice: Utiliser les fonctions caractéristiques.*)
   d) Conclure à l'aide du théroème de Slutsky.

Exercice 4

Soit $\theta > 0$ et $X_1, X_2, \dots$ des variables aléatoires iid uniformément distribuées sur $[0, \theta]$. Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n$ de θ est asymptotiquement exponentiel, avec pour vitesse de convergence n^{-1}.

Exercice 5

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$. Soit $f(x) = \lambda e^{-\lambda(x-a)} \mathbb{1}_{x \geq a}, x \in \mathbb{R}$. Soit $X_1, X_2, \dots$ des variables aléatoires iid de densité f et, pour tout $n \geq 1$, soit $(\hat{a}_n, \hat{\lambda}_n)$ l'estimateur du maximum de vraisemblance de (a, λ). Montrer que $\hat{a}_n$ est asymptotiquement exponentiel avec pour vitesse de convergence n^{-1} et que $\hat{\lambda}_n$ est asymptotiquement normal.

Exercice 6

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $X_1, X_2, \dots$ des variables aléatoires iid de loi $\mathcal{N}(\theta^3, 1)$.

1. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance θ_n de θ, pour $n \geq 1$.
2. Montrer que $\hat{\theta}_n$ est consistent.

3. Pour quelles valeurs de θ l'estimateur $\hat{\theta}_n$ est-il asymptotiquement normal ?
4. En fonction de θ, trouver $\alpha > 0$ tel que $|\hat{\theta}_n - \theta| = O_{\mathbb{P}}(n^{-\alpha})$.